MATEMATYKA

Lista 2 (Elementy logiki, teorii mnogości, liczby zespolone)

Zad 1. Czy następujące zdania są prawdziwe?

a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2-4x+3=0$ *b)* $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2-4x+3=0$ *c)* $\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{y\in\mathbb{N}}\ x>y$

d) $\exists_{x\in\mathbb{N}}\forall_{y\in\mathbb{N}}\ x>y$ *e)* $\forall_x\forall_y\ x^2=y$ *f)* $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2=x$

g) $\forall_x\Big(x\in\mathbb{Q}\vee\sim(x\in\mathbb{Q})\Big)$ *h)* $\Big(\forall_x\ x\in\mathbb{Q}\Big)\vee\Big(\forall_x\sim(x\in\mathbb{Q})\Big)$ *i)* $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ 2 dzieli $n(n+1)$

Zad 2. Wyznacz $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A$, jeśli:
a) $A=\{a,b,c\},\ B=\{c,d\}$ b) $A=\{x\in\mathbb{N}:x<3\},\ B=\{x\in\mathbb{N}:x\geq 2\}$
c) $A=\{x\in\mathbb{N}:x>5\},\ B=\{x\in\mathbb{N}:x=2\}$
d) $A=\{x\in\mathbb{R}:x\geq 4\},\ B=\{x\in\mathbb{R}:x<4\}$

Zad 3. Wyznacz iloczyn kartezjański $A\times B$ oraz $B\times A$, gdzie:
a) $A=\{0,1\},B=\{1,2\}$ b) $A=\{1\},B=\{1\}$
c) $A=\{n\in\mathbb{N}:n<4\},B=\{2\}$ d) $A=\mathbb{N},B=\{5\}$

Zad 4. Przyjmując, że punkty płaszczyzny są uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych, naszkicować ma płaszczyźnie $A\times B$ i $B\times A$ dla następujących zbiorów
a) $A=\{x\in\mathbb{R}:1<x<3\},\quad B=\{y\in\mathbb{R}:0<y<2\}$,
b) $A=\{x:x=2\},\quad B=\{y\in\mathbb{R}:-1<y<1\}$,
c) $A=\{x:x=0,\pm1,\pm2,...\},\quad B=\{y:y=2\}$,
d) $A=\{x\in\mathbb{R}:|x-2|>3\},\quad B=\{y\in\mathbb{R}:|y+2|\leq 3\}$,
e) $A=\{x\in\mathbb{R}:\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x+8}\geq 0\},\quad B=\{y\in\mathbb{R}:0<|y-1|<5\}$.

Zad 5. Sprawdzić czy prawdziwe są równości
a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$, b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$,
c) $A\setminus(B\times C)=(A\setminus B)\times(A\setminus C)$, d) $A\cap(B\times C)=(A\cap B)\times(A\cap C)$,
e) $A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C)$.

Zad 6. Liczby zespolone (a) $(2+i)(4-i)+(1+2i)(3+4i)$, (b) $\frac{(3+i)(2+2i)}{1+i}$, (c) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$, (d) $(1+2i)i+\frac{2+3i}{1-4i}$, (e) $(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})^3$ przedstawić w postaci $a+bi$.

Zad 7. Obliczyć i^5, i^{25}, i^{73}, i^{-7} oraz i^n dla $n\in Z$.

Zad 8. Wyznaczyć wszystkie liczby $x,y\in\mathbb{R}$ takie, że (a) $2x(3-i)(2+3i)+y(1-i)^2=18+8i$, (b) $x\frac{2+i}{3-i}+y\left(\frac{4-i}{1-3i}\right)^2=1+i$.

Zad 9. W liczbach zespolonych rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i,\end{cases}\qquad\begin{cases}2z_1-(2+i)z_2=-i\\(4-2i)z_1-5z_2=-1-2i.\end{cases}$$

Zad 10. W liczbach zespolonych rozwiązać następujące równania:
(a) $|z|+z=2+i$, (b) $z^2-4z+5=0$, (c) $z4-4z^2+5=0$,
(d) $z^2-5z+4+10i=0$, (e) $|z|+2iz=11+8i$, (f) $z^2-(5+5i)z+2+11i=0$,
(g) $z^2-2z=2i-1$, (h) $z|z|=z^4$, (i) $z^4=4z^6$.

Zad 11. Na płaszczyźnie zespolonej zaznaczyć nastepujące liczby zespolone oraz liczby z nimi sprzeżone: $2+i$, $2-i$, $-3+4i$, 2, $3i$, $5i-4$. Obliczyć moduły tych liczb.

Zad 12. Punkty $z_1=-1+2i$, $z_2=i$, $z_4=2+4i$ są wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć położenie pozostałego wierzchołka z_3.